الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$، نعتبر المستقيمين (d) و (d') المعرفين كمايلي:

$$(d): x-2=\frac{y-1}{2}=1-z \quad ، \quad (d'):\begin{cases} x=4+3t' \\ y=3+t' \quad ;t'\in\mathbb{R} \\ z=3+2t' \end{cases}$$

1) أكتب التمثيــل الوسيطي للمستقيم (d) ، ثم بين أن المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوي.

2) أ*/ أوجد المعــادلة الديكــارتية للمستويين (p_1) و (p_2) اللذين يشملان النقطة $A(4;-7;5)$.

حيث المستوي (p_1) يحوي المستقيم (d) و المستوي (p_2) يحوي المستقيم (d')

ب*/ تحقق أن المستويين (p_1) و (p_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) معرف بـ: $(\Delta):\begin{cases} x=\frac{-1}{11}+9\alpha \\ y=3-22\alpha \quad ;\alpha\in\mathbb{R} \\ z=11\alpha \end{cases}$

3) لتكــن $B\left(\frac{-1}{11};3;0\right)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (Q) ذو المعادلة: $11x+y-z=2$.

أ*/ أوجد إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q).

ب*/ استنتج المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على المستوي (Q).

4) (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

*/ عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني: (04 نقــاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0=8$ (الوحدة هي الـسنتيمتر) ، ليـكن S التشابــه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبتــــه $\frac{1}{2}$ و زاويتـــه $\frac{3\pi}{4}$

نعرف متتــالية النقــط (B_n) كمـــايلي : $B_{n+1}=S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n.

1 أنشئ النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4.

2 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3 نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ*/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب*/ أكتب عبارة u_n بدلالة n.

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim_{n\to+\infty} \delta_n$

4 أ*/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 4y = 2$

ب*/ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0.

*جد قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث: 05 نقـــاط

1 نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$(E)... \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$ ، $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z .

أ*/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

ب*/ حـل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A,B,C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ*/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا ســالبا .

ب*/ عين طبيعة المثلث ABC

3 أ*/أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب*/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

4 (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

*/ عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5 أ*/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\,\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب*/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

جـ*/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

Nafouz

التمرين الرابع:(07 نقــاط)

1 g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

ب*/ استنتج أنه : إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x \succ 1$ فإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيـلـها البيـاني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

h دالـة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني **أنظر الملحق)**

أ*/ أحسـب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

ب*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج*/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3 أ*/ بين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيـث: $1.5 \prec \beta \prec 1.6$ و $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب*/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج*/ بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4 أ*/ أرسم (T) و (C_f) . **(الملحــق يعـــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب*/ m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$$

5 أ*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x [f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$

ب*/ ليكن العدد λ من المجـال $]0;1]$ ،

$A(\lambda)$ مســاحة الحيز المستوي المحــدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=\lambda$ و $x=1$.

* استنتـــج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة) ، ثم احسـب $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ >}} A(\lambda)$.

الموضوع الاول: التمرين الأول: 04 نقاط)

1 كتابة التمثيل الوسيطي (d): t وسيط حقيقي

أي أن: $x-2=\frac{y-1}{2}=1-z=t$ ومنه: $(d):\begin{cases}x-2=t\\ \frac{y-1}{2}=t\\ 1-z=t\end{cases};t\in\mathbb{R}$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) هو $\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1;t\in\mathbb{R}\\ z=-t+1\end{cases}$

***/ تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوي:**

$\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) ، $\vec{u'}(3;1;2)$ شعاع توجيه (d')

بماأن $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{3}$ فإن الشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ و $\vec{u'}(3;1;2)$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d')

إما ليسا من نفس المستوي و إما متقاطعان من نفس المستوي

لتكن $E(x;y;z)$ نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

$\begin{cases}x=t+2=3t'+4...(1)\\ y=2t+1=t'+3...(2)\\ z=-t+1=2t'+3...(3)\end{cases};(t,t')\in\mathbb{R}^2$ نبحث عن الثنائية (t,t')

بجمع (1) و(3): $t'=\frac{-4}{5}$ وبتعويضها في (1) أو (3)

نجد: $t=\frac{-2}{5}$ ، الثنائية $\left(\frac{-2}{5},\frac{-4}{5}\right)$ لا تحقق (2)

ومنـه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوي

2) أ ايجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p_1) و (p_2)

ويشملان $A(4;-7;5)$ و $(d)\subset(P_1)$ و $(d')\subset(P_2)$

تعيين معادلة المستوى (p_1): (p_1) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) و

$\overrightarrow{AD}(-2;8;-4)$ حيث $D(2;1;1)$ نقطة من (d)

ليكن: $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (p_1) غير معدوم

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a+2b-c=0 \quad ...(1)\\ -2a+8b-4c=0..(2)\end{cases}$ بجمع (1) و (2)

نجد $6b-3c=0$ ومنه $c=2b$ نأخذ: $b=1$ نجد $c=2$

و $a=0$ ومنه: $\vec{n}(0;1;2)$ ناظمي لـ $(P_1): y+2z+d=0$

$A\in(P_1)$ معناه $7+10+d=0$ معناه $d=-3$

ومنـــه: $(P_1): y+2z-3=0$

تعيين معادلة للمستوي (P_2): لدينا (P_2) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u'}(3;1;2)$ شعاع توجيه (d') و

$\overrightarrow{AC}(0;10;-2)$ حيث $C(4;3;3)$ نقطة من (d')

بنفس الطريقة $(P_2): 11x-3y-15z+10=0$

ب) التحقق أن (p_1) و (p_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

بما أن: $\frac{1}{-3}\neq\frac{0}{11}$ فإن $\vec{n}(0;1;2)$ و $\vec{n'}(11;-3;-15)$ غير

مرتبطين خطيا وعليه يكون المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعين

وفق مستقيم (Δ). لدينا: $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{-1}{11}+9\alpha\\ y=3-22\alpha \;;\alpha\in\mathbb{R}\\ z=11\alpha\end{cases}$

$(P_1): y+2z-3=0$ ، $(P_2): 11x-3y-15z+10=0$

$(-22\alpha+3)+2(11\alpha)-3=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه : $(\Delta)\subset(P_1)$

$11\left(\frac{-1}{11}+9\alpha\right)-3(3-22\alpha)-15(11\alpha)+10=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه : $(\Delta)\subset(P_2)$

نستنتج أن $(\Delta)=(P_1)\cap(P_2)$

3) أ*/ إيجاد إحداثيات A' المسقط العمودي لـ A على المستوي (Q): $A'(x';y';z')$ ، $\overrightarrow{n_Q}(11;1;-1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A\in(\Delta)$. بما أن: $11x_A+y_A-z_A\neq2$ فإن $A\notin(Q)$

وبالتالي $\overrightarrow{AA'}$ يوازي $\overrightarrow{n_Q}$ يوجد $k\in\mathbb{R}$ حيث $\overrightarrow{AA'}=k\cdot\overrightarrow{n_Q}$

أي $\overrightarrow{AA'}(x'-4;y'+7;z'-5)$

$\begin{cases}x'-4=11k\\ y'+7=k\\ z'-5=-k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x'=11k+4\\ y'=k-7\\ z'=-k+5\end{cases}$ ، $A'\in(Q)$ معناه

$11(11k+4)+(k-7)-(-k+5)-2=0$ معناه $k=-\frac{10}{41}$

بالتعويض عن قيمة k نجد: $A'\left(\frac{54}{41};-\frac{297}{41};\frac{215}{41}\right)$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوي (Q):

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هوالمستقيم (BA')

4 تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

(Γ) هي سطح كرة قطرها $[AB]$ ، $AB=\sqrt{\frac{17150}{121}}\approx11.9$

ومركزها النقطة $I\left(\frac{43}{22};-2;\frac{5}{2}\right)$ منتصف $[AB]$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0=8$ ، S التشابه المباشر

مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، : $B_{n+1}=S\left(B_n\right)$

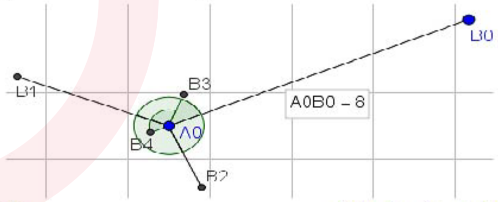
1 انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4:

$B_1=S(B_0)$ يكافئ $\begin{cases} A_0B_1=\frac{1}{2}A_0B_0=4 \\ \left(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_2=S\left(B_1\right)$ معناه $\begin{cases} A_0B_2=\frac{1}{2}A_0B_1=2 \\ \left(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_3=S\left(B_2\right)$ معناه $\begin{cases} A_0B_3=\frac{1}{2}A_0B_2=1 \\ \left(\overrightarrow{A_0B_2},\overrightarrow{A_0B_3}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_4=S\left(B_3\right)$ معناه $\begin{cases} A_0B_4=\frac{1}{2}A_0B_3=\frac{1}{2} \\ \left(\overrightarrow{A_0B_3},\overrightarrow{A_0B_4}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$



(**2 اثبات أن المثلثين** $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ **متشابهان من أجل كل عدد طبيعي** n **:**

$B_{n+1}=S\left(B_n\right)$ معناه $A_0B_{n+1}=\frac{1}{2}A_0B_n$

و $\left(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بما أن:

$\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n}=\frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n}$ و $\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}}=\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}}$ و

$\left(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}}\right)=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_n},\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_{n+1}}\right)=\left(\overrightarrow{A_0B_{n+1}},\overrightarrow{A_0B_{n+2}}\right)$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

(ضلعان و زاوية محصورة بينهما)ومنه: $\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$

* **3)أ اثبات أن** (u_n) **متتالية هندسية أساسها** $\frac{1}{2}$: نعرف

متتالية (u_n) بـ $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$\frac{1}{2}=\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ومنـه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

و حـــدها الأول $u_0=B_0B_1$

ب*/ كتابة عبـارة u_n **بـدلالة** n:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=B_0B_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ،

حساب δ_n **بدلالة** n **ثم إيجاد** $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n$: δ_n م.ح.م.هندسية

$$\delta_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2B_0B_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n=2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعادلة :** $(1)...3x-4y=2$

(1) يكـافئ $3x=4y+2$ يكـــافئ $3x\equiv 2[4]$

يكـافئ $7\times 3x\equiv 7\times 2[4]$ يكـــافئ $x\equiv 2[4]$

ومنه: $x=4\lambda+2$ ، $\lambda\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1)نجد

$y=3\lambda+1$ إذن: $S=\left\{(4\lambda+2;3\lambda+1);\lambda\in\mathbb{Z}\right\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n **التي من اجلها تكون النقطة** B_n **تنتمي إلى المستقيم** (Δ):

لدينا: (Δ) العمودي على $\left(A_0B_0\right)$في النقطة A_0 وكذلك

$\left(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n}\right)=\left(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1}\right)+\left(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2}\right)+...$

$....+\left(\overrightarrow{A_0B_{n-1}},\overrightarrow{A_0B_n}\right)=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+...+\frac{3\pi}{4}=n\frac{3\pi}{4}$

B_nتنتمي إلى (Δ)معناه $\left(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

نجد: $n\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ $3n=4\left(\frac{1}{2}+k\right)$

يكـافئ $3n=2+4k$ يكـــافئ $3n-4k=2$

ومنه قيم n هــي $n=4k'+2$ ، $k'\in\mathbb{Z}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1 أ*/نبين أن المعادلة (E) تكافئ: $(\bar{z}+1)\left(\bar{z}^2-4\bar{z}+7\right)=0$

لدينا : $(E)...\ \bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$

$(\bar{z}+1)\left(\bar{z}^2-4\bar{z}+7\right)=0$ يكافئ $\bar{z}^3-4\bar{z}^2+7\bar{z}+\bar{z}^2-4\bar{z}+7=0$

يكافئ $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$

ب */ نحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E)

(E) تكافئ $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

يكافئ $\overline{(z+1)}\,\overline{(z^2-4z+7)}=0$ يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$

يكافئ $\begin{cases} z=-1 \\ z^2-4z+7=0 \end{cases}$ ، $\Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$

$z_1=2-\sqrt{3}i$ و $z_2=2+\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\{-1;2-\sqrt{3}i\,;2+\sqrt{3}i\}$

2 أ /تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B-z_A)^n=(2+\sqrt{3}i+1)^n=(3+\sqrt{3}i)^n$$

ومنه $(z_B-z_A)^n=(2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه

$\arg(z_B-z_A)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi$

إذن $n=12k+6\;;k\in\mathbb{N}$

ب*/تعيين طبيعة المثلث ABC

$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

$BC=|z_C-z_B|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

بما إن $AB=AC=BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3 أ*/ كتابة العدد $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

***/استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:** $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D-z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه

$$\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\sqrt{3}\\(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

لاحقتها $z_I=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{1}{2}$

4 تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\;;k\in\mathbb{Z}$

/ * استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :

$z-z_A=k(z_B-z_A)$ معناه $z+1=2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$

معناه $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه :من أجل k يمسح المجال $]0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

لاحقته : $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=3+i\sqrt{3}$

5 أ*/تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

$$\begin{cases}x_C=\frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha}\\y_C=\frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha}\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}2=\frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha}\\-\sqrt{3}=\frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha}\end{cases}$$ ومنه $\alpha=-3$

ب*/ تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث :

$$\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\le2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|...(*)$$

(*)تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MD}\right\|\le2\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right\|$

(*)تكافئ $\left\|-\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MD}\right)\right\|\le2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

(*)تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\|\le2BC$ تكافئ $CM\le BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو : $BC=2\sqrt{3}$

جـ*/ استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصف المستقيم $[AB)$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$BC=2\sqrt{3}$ و $AC=2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB)$ هو القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الرابع: (07 نقـــاط)

1) g معرفة على $]0;+\infty[$ بــ : $g(x)=x^2e^x$

أ*/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=(x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x)\succ0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب*/ استنتاج أنه : إذا كان $0\prec x\prec1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x\succ1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0\prec x\prec1$ فـإن $x\prec\frac{1}{x}$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x\succ1$ فـإن $x\succ\frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

أ*/ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

ب*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم حساب $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x)=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه: $f'(1)=g(1)-g\left(\frac{1}{1}\right)=0$

ج*/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشـــارة $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1]$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e=-2.71$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ*/ نبين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5<\beta<1.6$ و $0.5<\alpha<0.6$

$(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تكافئ $(x^2-2x+2)e^x+h(x)=0$

تكافئ $f(x)=0$ ، لدينا: $f(0.5)\approx 1.25$ ، $f(0.6)\approx -0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.6)\times f(0.5)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $0.5<\alpha<0.6$ ، $f(\alpha)=0$

لدينا: $f(1.5)\approx -0.60$ ، $f(1.6)\approx 0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$f(1.6)\times f(1.5)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $1.5<\beta<1.6$ ، $f(\beta)=0$

*/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$x^2-2x+2>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $\Delta=-4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

ج*/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

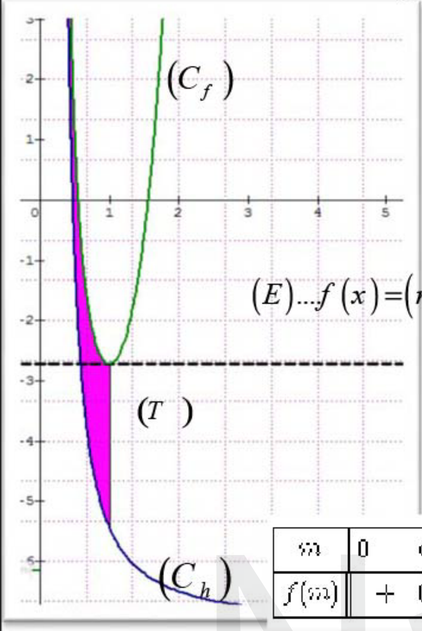
بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f)

يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، $f'(1)=0; f(1)=-e$

ومنه: $(T): y=-e$

4) أ*/ رسم (T) و (C_f) :



ب*/إيجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m>0$

$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$

المعادلة (E) تكـــافئ $f(x)=f(m)$

إشارة $f(m)$:

m	0		α		1		β		$+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

من أجـــل $m=1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنـــه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما

$m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) أ*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

لدينا: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt$

الدالة: $t\to(t^2-2t+2)e^t$ مستمرة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية على $]0;+\infty[$

$$\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'=(t^2-2t+2)e^t$$

$$\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt=\int_1^x\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'dt$$
$$=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

ب*/استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ(C_h)

و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما$x = \lambda$ و $x = 1$

(مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda \in]0;1[$:

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(t) - h(t)]dt = -\int_\lambda^1 [f(t) - h(t)]dt$$

$$A(\lambda) = -[(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda - 3e]$$

$$= (3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda) u\,a$$

*/ حساب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \xrightarrow{>} 0} [3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda] = 3e$$